Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann SS 2012

Lineare Algebra II

Übungsblatt 4

Abgabe 04.05.2012

Aufgabe 1:
Sei K ein Körper und sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\beta : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform und sei $B = B_\beta$ die Fundamentalmatrix von β bezüglich irgendeiner gewählten Basis.

(i) Es sei
$$V^\perp = \{v \in V \mid \beta(v, v') = 0 \text{ für alle } v' \in V\}.$$
Zeige, dass $\dim V^\perp = \dim V - \operatorname{rg} B$ gilt.

(ii) Sei nun $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{Q}^4$ und sei β bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{Q}^4$ durch die Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
gegeben. Bestimme eine Basis von $V^\perp$.

Aufgabe 2:
Sei K ein Körper und bezeichne $M_n(K)$ den K-Vektorraum der $n \times n$ Matrizen über K. Wir definieren
$$\begin{aligned} \beta : M_n(K) \times M_n(K) &\longrightarrow K \\ (A, B) &\longmapsto \operatorname{Spur}(AB). \end{aligned}$$

Zeige:

(i) β ist eine symmetrische Bilinearform.

(ii) β ist nicht ausgeartet.

Hinweis: Betrachte Matrizen der Form $E_{i,j} = (e_{kl})$ mit $e_{kl} = \begin{cases} 1 & (k,l) = (i,j) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(iii) Berechne für $n = 2$ die Fundamentalmatrix von β bezüglich der Basis $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ sowie deren Determinante. Warum ist diese nicht Null?

(iv) Zeige: Für $K = \mathbb{R}$ ist β genau dann ein Skalarprodukt, wenn $n = 1$ ist.

Aufgabe 3:
Sei K ein Körper und seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Sei $\mathrm{Bil}(V,W)$ der K-Vektorraum aller K-bilinearen Abbildungen von $V \times W$ nach K.

(i) Zeige, dass die Abbildung

$$\Psi : \mathrm{Hom}(V, W^*) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V,W), \qquad \varphi \longmapsto ((x,y) \mapsto \varphi(x)(y))$$

ein Isomorphismus ist.

(ii) Sei jetzt $V = W$. Fixiere eine Basis $B = (b_1, \dots, b_m)$ von V. Sei B^* die duale Basis zu B. Sei $f : V \to V^*$ eine lineare Abbildung und $\beta = \Psi(f)$ die zugehörige Bilinearform. Sei $M = c_B^{B^*}(f)$ die Matrix, die f bezüglich der Basen B und B^* beschreibt und sei N die Strukturmatrix von β zur Basis B. Zeige

$${}^tM = N.$$

Aufgabe 4:
Sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein euklidischer Vektorraum und seien $v_1, \dots, v_n, w \in V$. Es gelte

$$\begin{aligned} (v_i, w) &> 0 && \text{für } i = 1, \dots, n \\ (v_i, v_j) &\leq 0 && \text{für } 1 \leq i, j \leq n,\ i \neq j. \end{aligned}$$

Zeige, dass $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind.
Hinweis: Vollständige Induktion. Im Induktionsschritt konstruiere für $i = 1, \dots, n-1$ geeignete Linearkombinationen v_i' von v_i und v_n, die auf v_n senkrecht stehen und die Induktionsvoraussetzung erfüllen.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_II`