Dr. Ulrich Görtz **WS 2005/06**

Übungen zur Algebraischen Geometrie

Blatt 8, Abgabe am 14.12.2005

Aufgabe 29

a) Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ ein surjektiver, endlicher Morphismus von Prävarietäten. Zeige, dass $\dim X = \dim Y$.

b) Seien X, Y Prävarietäten. Zeige, dass $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.

Aufgabe 30

Ordne die folgenden Mengen aufsteigend nach ihrer Dimension.

i) $X_1 = V_+(X_0+2X_1+3X_2+4X_3+5X_4+6X_5+7X_6+8X_7, X_3^2+X_4^2+X_5^2) \subseteq \mathbb{P}^7(k)$

ii) $X_2 = V(XZ, YZ) \subseteq \mathbb{A}^3(k)$

iii) $X_3 = V_+(X_0X_3, X_2, X_3^3 + 2X_1X_3^2 - X_0X_1^2) \subseteq \mathbb{P}^3(k)$

iv) $X_4 = V_+(X_0X_2 - X_1^2, X_0X_3 - X_1X_2, X_1X_3 - X_2^2) \subseteq \mathbb{P}^3(k)$

v) $X_5 = V_+(X_3X_4^3 + X_5^4 - X_7X_0^3, X_2X_1X_0) \subset \mathbb{P}^8(k)$

Aufgabe 31

Sei $\mathbb{P}^{n-1}(k) \cong \Lambda \subset \mathbb{P}^n(k)$ ein linearer Unterraum, sei $X \subseteq \Lambda$ eine abgeschlossene Untervarietät, sei $p \in \mathbb{P}^n(k) \setminus \Lambda$ und sei $K = \overline{X, p}$ der Kegel mit Scheitelpunkt p über X. Zeige, dass $\dim K = \dim X + 1$.

Hinweis: Zeige, dass $K \setminus \{p\}$ lokal auf X isomorph ist zum Produkt von X mit $\mathbb{A}^1(k)$.

Aufgabe 32

Sei A ein Ring, $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, und sei $\varphi\colon A \longrightarrow S^{-1}A$ der kanonische Homomorphismus. Zeige, dass die zu φ assoziierte Abbildung $f\colon \operatorname{Spec} S^{-1}A \longrightarrow \operatorname{Spec} A$, $\mathfrak{P} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$, einen Homöomorphismus von $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ auf die Teilmenge $D(S) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A;\ \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}$ von $\operatorname{Spec} A$ induziert.

Gib ein Beispiel an, in dem $D(S)$ nicht offen ist.