WS 03/04, 20.1.2004 **Blatt 13** H. Karcher, A.Vdovina

Differentialgeometrie I

KLAUSURTERMIN: **Donnerstag 5.2.04, 8:15 - 11:15, Beringstr.3, Hausdorffraum**

Es ist Gauß' Entdeckung, daß die Determinante der Weingartenabbildung, also das Produkt der beiden Hauptkrümmungen, durch die Riemannsche Metrik bestimmt ist. Dies ist sein **Theorema Egregium.** *Wir hatten nachgerechnet, daß für die geodätische Krümmung in Parallelkurvenscharen $t \mapsto c(t;\epsilon)$ gilt*

$$\frac{d}{d\epsilon}\kappa_g(t;\epsilon) + \kappa_g(t;\epsilon)^2 = -\det(S).$$

Auch diese Formel zeigt, daß $\det(S)$*, die sog.* **Gauß'sche Krümmung**, *nur von der Riemannschen Metrik abhängt. In den folgenden Aufgaben sollen die Weingartenabbildung und die Gauß'sche Krümmung für einige explizite Flächenklassen berechnet werden.*

Aufgabe 13.1 (Gauß'sche Krümmung für Rotationsflächen)

Die Hauptkrümmungen von Rotationsflächen ebenso wie die geodätische Krümmung der Parallelschar ihrer Breitenkreise waren schon in früheren Aufgaben berechnet (7.1, 8.1, 9.1). Sie können also $\det(S)$ und $\kappa_g' + \kappa_g^2$ leicht berechnen und das Theorema Egregium verifizieren.

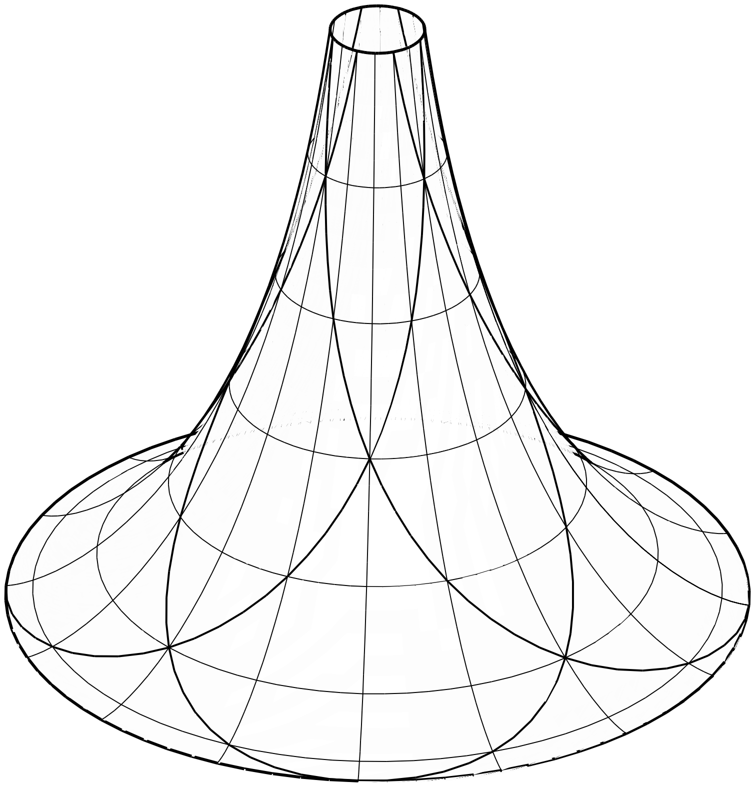
Aufgabe 13.2 (Weingartenabbildung für Graphen)

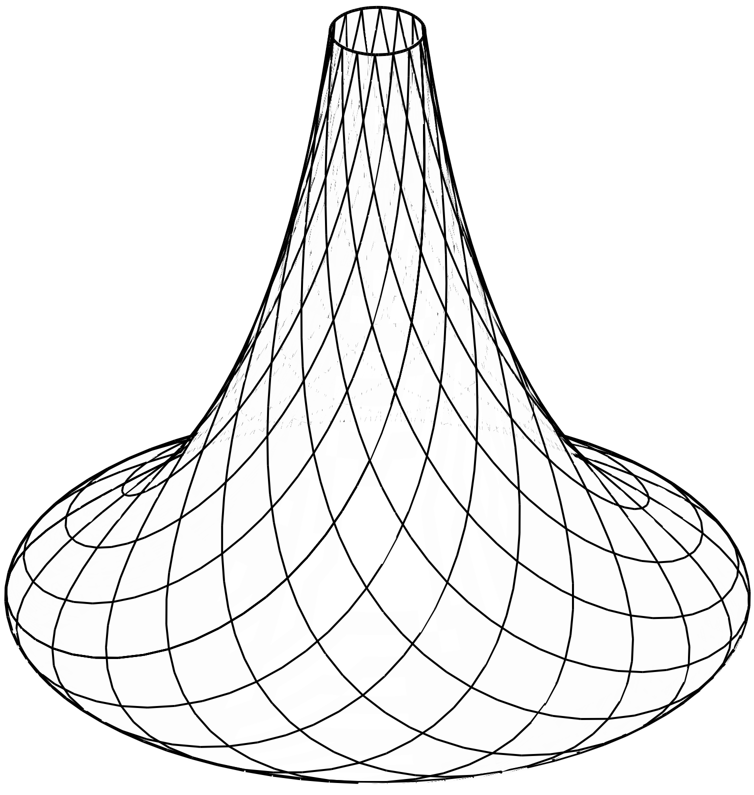
Jede Fläche kann lokal als Graph über Ihrer Tangentialebene parametrisiert werden. Betrachten Sie daher $F(u,v) := (u,v,f(u,v))$ mit $\operatorname{grad} f(0,0) = 0$. Berechnen Sie die Weingartenabbildung und ihre Determinante in $(0,0)$ aus der Hesseschen von f.
Beobachten Sie, daß daher eine Fläche lokal auf einer Seite ihrer Tangentialebene bleibt, wenn $\det(S) > 0$ ist ("lokal konvex"), und daß sie die Tangentialebene schneidet, wenn $\det(S) < 0$ ist ("Sattelfläche").

Aufgabe 13.3 (Weingartenabbildung für manche Regelflächen)

Flächen, auf denen eine Schar von Geraden liegt, heißen Regelflächen. Wir betrachten zwei Typen, die durch eine mit der Bogenlänge parametrisierte Raumkurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ definiert sind,
(a) die Tangentenflächen, parametrisiert als $F : (s,t) \mapsto c(t) + (s-t)c'(t)$, und
(b) Normalenflächen, die von einem minimal rotierenden Normalenfeld $v(t)$, für das also $|v(t)| = 1,\ v(t) \perp c'(t),\ v'(t) = a(t)\cdot c'(t)$ gilt, so erzeugt werden: $F : (s,t) \mapsto c(t) + s\cdot v(t)$.

Zeigen Sie, daß die Geraden auf diesen Flächen Krümmungslinien sind. Natürlich haben sie dann die Hauptkrümmung 0 und es folgt $\det(S) = 0$.
Da die t-Linien senkrecht zu den Geraden sind, sind sie einerseits ebenfalls Krümmungslinien, andererseits eine Parallelkurvenschar. Berechnen Sie die geodätische und die Normal-Krümmung dieser Kurven.





Die beiden Bilder zeigen die berühmte Pseudosphäre, eine Rotationsfläche mit $\det(S) = -1$. Sie ist lokal isometrisch zur Hyperbolischen Ebene. Das Bild mit den Krümmungslinien als Parameterlinien wird von unseren Augen gut interpretiert. Auf dem anderen Bild haben die Parameterlinien Normalkrümmung null (sog. Asymptotenlinien); das bedeutet, daß ihre Schmiegebene tangential an die Fläche ist. Aus dieser speziellen Situation rekonstruieren unsere Augen die räumliche Gestalt der Fläche nicht richtig.